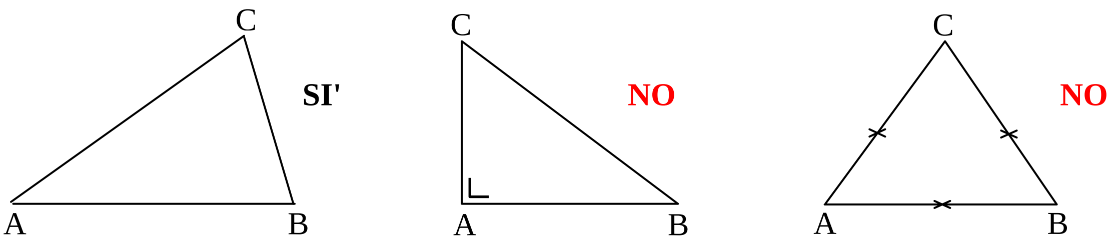
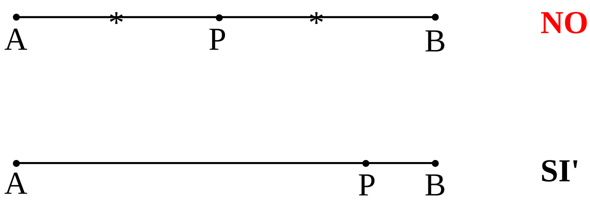
CONSIGLI:

- Per dimostrare che sono congruenti alcuni lati o angoli, devi considerare, in genere, triangoli che "contengano" quei lati o quegli angoli, deducendo la loro congruenza in base ad uno dei criteri di congruenza dei triangoli. Nel caso dovesse mancare "qualcosa", sarà necessario considerare altri triangoli, o altre proprietà, che ti permettano di dedurre quel "qualcosa", indispensabile, e propedeutico, alla dimostrazione.

- Quando ti viene detto di considerare un triangolo, senza nessuna altra ipotesi sui suoi lati o angoli, **devi disegnare un triangolo qualsiasi**, cioè un triangolo non particolare [né isoscele, né equilatero, né con angoli particolari (30°, 45°, 60°, 90°, …)].
  Dato un triangolo ABC, prendere …



- Così, quando si dice di prendere un punto P su un dato segmento AB, non devi **mai** fissare P "*nel*" punto medio,… o "*vicino*" al punto medio, **ma** in punto, interno al segmento, "*lontano*" dal punto medio.

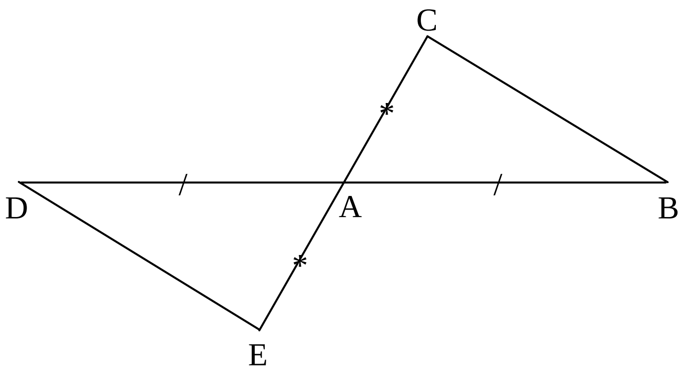


- Dato un angolo $A\hat{O}B$, considera una semiretta OC interna all'angolo $A\hat{O}B$. **PROVA TU** a disegnare una **figura corretta** e una *figura particolare* (*da non fare*!).

Tutto questo per evitare che figure particolari possano indurti a conclusioni affrettate e/o a considerazioni che non abbiano rispondenza alcuna con i dati del problema in oggetto.

1° Problema risolto

Dato il triangolo ABC, si prolunghino i lati AB e AC, oltre A, rispettivamente di due segmenti AD ed AE con $AD \cong AB$ e $AE \cong AC$. Dimostrare che $BC \cong DE$.



Hp.: $\begin{cases} AD \cong AB \\ AE \cong AC \end{cases}$

Th.: $BC \cong DE$

Dimostrazione

Consideriamo i triangoli ABC e ADE; essi hanno:

$AB \cong AD$ per ipotesi;

$AC \cong AE$ per ipotesi;

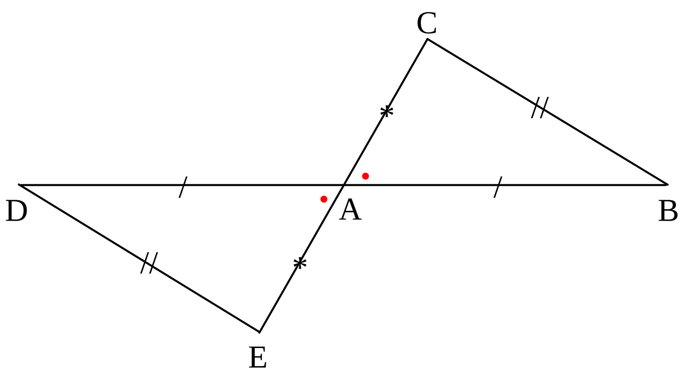
$B\widehat{A}C \cong D\widehat{A}E$ perché angoli opposti al vertice ("*segnare $B\widehat{A}C$ e $D\widehat{A}E$ con il simbolo* • ").

I due triangoli, avendo due lati e l'angolo fra essi compreso ordinatamente congruenti, sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli. Avranno, pertanto, tutti gli elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$BC \cong DE$ ("*segnare BC e DE con il simbolo* // ").

C.V.D.

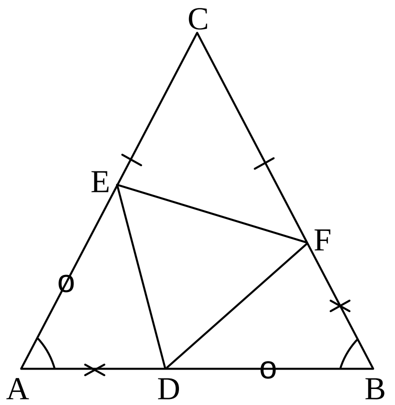
[Al termine del problema la figura si presenta come segue:



]

2° Problema risolto

Dato il triangolo isoscele ABC, sia D un punto della base AB. Si considerino su AC il segmento $AE \cong BD$ e su BC il segmento $BF \cong AD$. Si dimostri che il triangolo DEF è isoscele.



Hp.: $\begin{cases} AC \cong BC \\ AE \cong BD \\ BF \cong AD \end{cases}$

Th.: $\overset{\triangle}{DEF}$ isoscele

Dimostrazione

Consideriamo i triangoli ADE e BDF; essi hanno:

$AE \cong BD$ per ipotesi;

$AD \cong BF$ per ipotesi;

$D\hat{A}E \cong D\hat{B}F$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele.

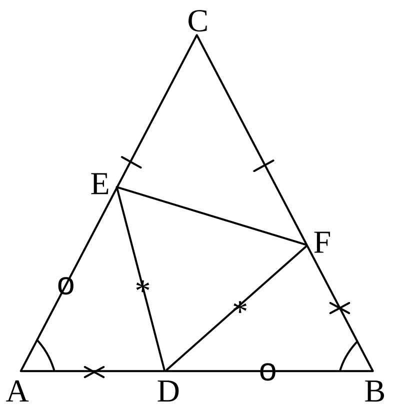
I due triangoli, avendo due lati e l'angolo fra essi compreso ordinatamente congruenti, sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli. Avranno, pertanto, tutti gli elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$DE \cong DF$ ("*segnare DE e DF con il simbolo* $*$ "),

per cui il triangolo DEF risulta isoscele sulla base EF.

C.V.D.

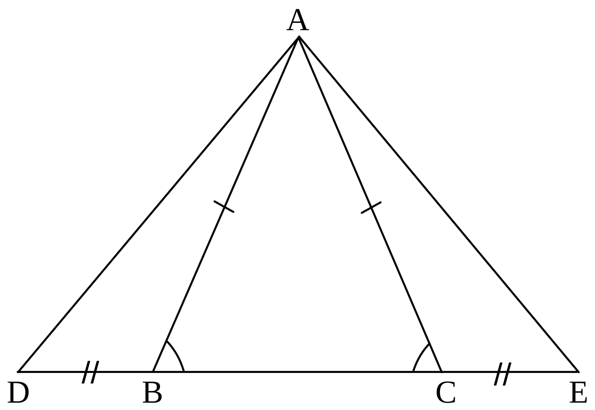
[Al termine del problema la figura si presenta come segue:



]

3° Problema risolto

Sui prolungamenti della base BC di un triangolo isoscele ABC si riportino i segmenti congruenti BD e CE. Dimostrare che il triangolo ADE è isoscele.



Hp.: $\begin{cases} AB \cong AC \\ BD \cong CE \end{cases}$

Th.: $A\widehat{D}E$ isoscele

Dimostrazione

Consideriamo i triangoli ABD e ACE; essi hanno:

$AB \cong AC$ per ipotesi;

$BD \cong CE$ per ipotesi;

$A\widehat{B}D \cong A\widehat{C}E$ in quanto supplementari di angoli congruenti [$A\widehat{B}C \cong A\widehat{C}B$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele (“*segnare $A\widehat{B}D$ e $A\widehat{C}E$ con il simbolo* • ”)].

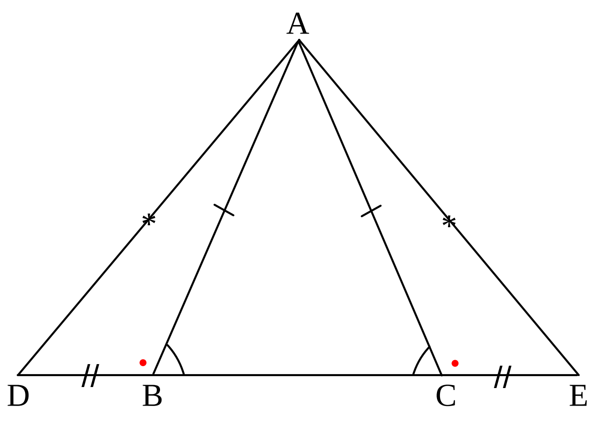
I due triangoli, avendo due lati e l’angolo fra di essi compreso ordinatamente congruenti, sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli. Avranno, pertanto, tutti gli elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$AD \cong AE$ (“*segnare AD e AE con il simbolo* $*$ ”),

per cui il triangolo ADE è isoscele sulla base DE.

C.V.D.

[Al termine del problema la figura si presenta come segue:

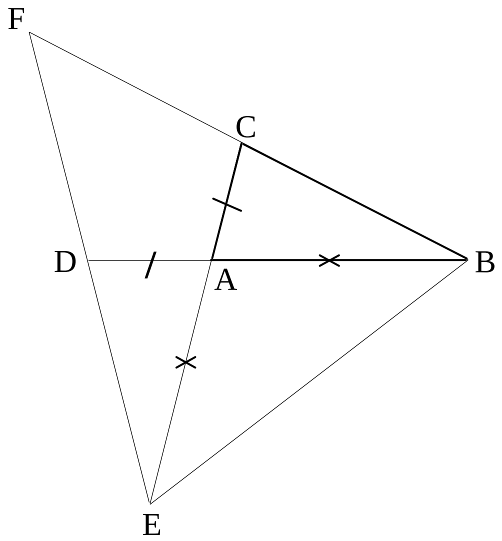


]

4° Problema risolto

Dato un triangolo ABC, si prolunghino i lati AB e AC rispettivamente dei segmenti $AD \cong AC$ ed $AE \cong AB$. Detto F il punto di intersezione delle rette DE e CB, dimostrare che:

- il triangolo BEF è isoscele;
- la semiretta FA è bisettrice dell'angolo $B\widehat{F}E$.



$$\text{Hp.:} \begin{cases} AD \cong AC \\ AE \cong AB \\ DE \cap CB = \{F\} \end{cases}$$

$$\text{Th.:} \begin{cases} B\hat{E}F \text{ isoscele} \\ E\widehat{F}A \cong B\widehat{F}A \end{cases}$$

Dimostrazione

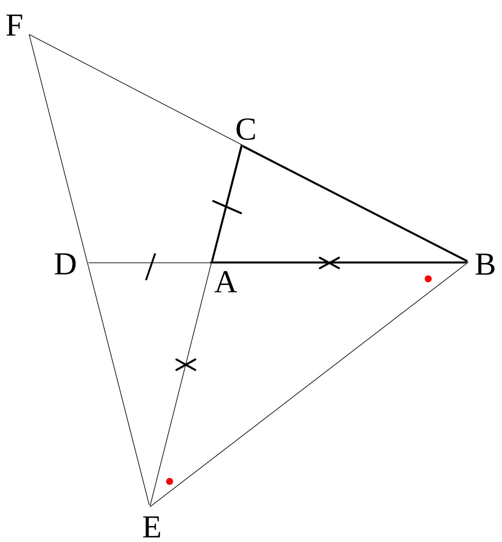
Osserviamo che:

$AE \cong AB$ per ipotesi,

e quindi il triangolo ABE è isoscele sulla base BE.

Si ha, pertanto, che:

$A\widehat{E}B \cong A\widehat{B}E$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele (“*segnare $A\widehat{E}B$ e $A\widehat{B}E$ con il simbolo* • ”).



Consideriamo ora i triangoli ADE e ABC; essi hanno:

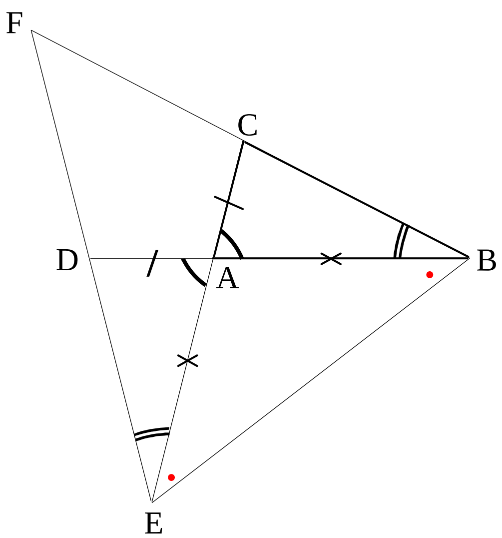
$AD \cong AC$ per ipotesi;

$AE \cong AB$ per ipotesi;

$D\widehat{A}E \cong B\widehat{A}C$ perché angoli opposti al vertice ("*segnare $D\widehat{A}E$ e $B\widehat{A}C$ con il simbolo* ")

I due triangoli, avendo due lati e l'angolo fra essi compreso ordinatamente congruenti, sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli. Avranno, quindi, tutti gli elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$A\widehat{E}D \cong A\widehat{B}C$ ("*segnare $A\widehat{E}D$ e $A\widehat{B}C$ con il simbolo* ").



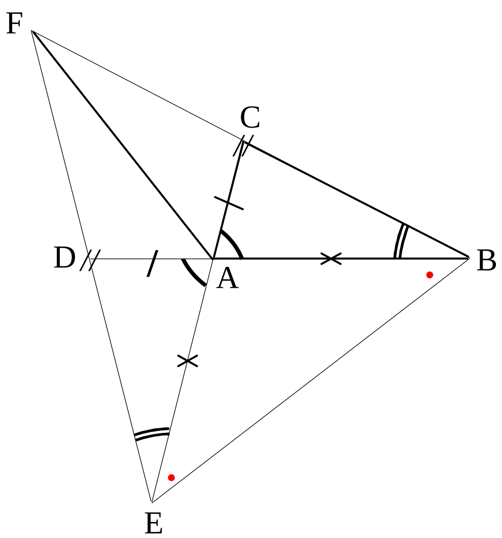
Si ha, pertanto, che:

$F\widehat{E}B \cong F\widehat{B}E$ perché somme di angoli congruenti,

e quindi il triangolo BEF risulta isoscele sulla base BE, per cui:

$FE \cong FB$ ("*segnare FE e FB con il simbolo // *").

Congiungiamo A con F (<u>solo ora</u>!):



Consideriamo i triangoli FAE e FAB; essi hanno:

- $FE \cong FB$ per quanto precedentemente osservato;
- $AE \cong AB$ per ipotesi;
- AF in comune (o $AF \cong AF$ per la proprietà riflessiva della congruenza).

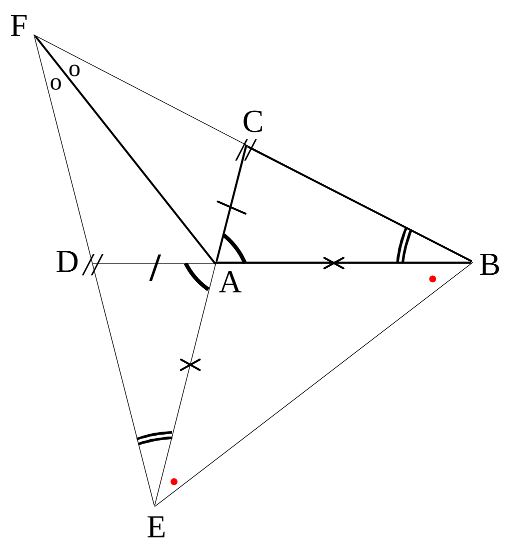
I due triangoli, avendo i tre lati ordinatamente congruenti, sono congruenti per il 3° criterio di congruenza dei triangoli. Avranno, pertanto, tutti gli elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

$E\widehat{F}A \cong B\widehat{F}A$ (“*segnare $E\widehat{F}A$ e $B\widehat{F}A$ con il simbolo* o ”).

C.V.D.

[*Si poteva dimostrare la congruenza dei triangoli FAE e FAB con il 1° criterio di congruenza* (*$AE \cong AB$; $FE \cong FB$; $A\widehat{E}F \cong A\widehat{B}F$*)].

[Al termine del problema la figura si presenta come segue:



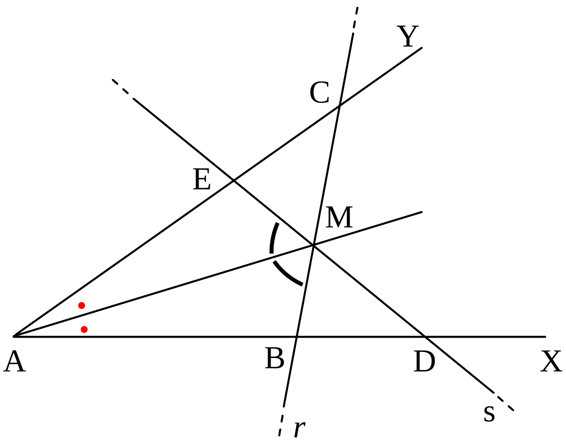
]

OSSERVAZIONE (volutamente … *ritardata*)

Nella risoluzione dei problemi, avrai notato che, una volta dimostrata la congruenza di due triangoli, ci siamo spesso <u>limitati</u> a dedurre la congruenza <u>solo</u> di <u>alcuni</u> elementi corrispondenti (o perché era quanto direttamente richiesto dal problema o perché, “lungimiranti”, avevamo compreso quali relazioni ci servivano nel proseguo del nostro lavoro). Altre volte, “meno lungimiranti”, ma in ogni caso non per *miopia matematica*, abbiamo preferito, <u>nel dubbio</u>, elencare tutti gli elementi corrispondenti congruenti, anche se qualche relazione non è stata poi utilizzata nel proseguo della dimostrazione.

PROVA TU a completare il seguente problema:

Sulla bisettrice di un angolo $X\hat{A}Y$ si prenda un punto M e per esso si conducano due rette *r*, *s* non parallele ai lati dell'angolo e tali che AM sia bisettrice di due degli angoli $\widehat{rs}$. Siano B e C le intersezioni di *r* con i lati dell'angolo $X\hat{A}Y$, e D, E le intersezioni di *s* rispettivamente con gli stessi lati. Dimostrare che $BD \cong EC$.



Hp.: $\begin{cases} X\hat{A}M \cong \ldots.. \\ \ldots.. \cong A\hat{M}E \end{cases}$

Th.: $BD \cong EC$

Dimostrazione

Consideriamo i triangoli ABM e ……. ; essi hanno:

AM …………….. (o $AM \cong$ ….. per la proprietà riflessiva della congruenza);

$B\hat{A}M \cong E\hat{A}M$ …………… ;

$A\hat{M}B \cong A\hat{M}E$ …………… .

I due triangoli, avendo un lato e i due angoli ad essi adiacenti ordinatamente congruenti, sono congruenti per il …. criterio di congruenza dei triangoli. Avranno, pertanto, tutti gli elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

….. $\cong$ AE ("*segnare .... e .... con il simbolo* / ").

Osserviamo inoltre che:

$B\hat{M}D \cong$ …… perché angoli opposti al vertice ("*segnare* $B\hat{M}D$ *e …… con il simbolo* \\\\ "),

per cui:

…… $\cong A\hat{M}C$ perché somme di angoli congruenti ($A\hat{M}B \cong$ …… e …… $\cong C\hat{M}E$).

Consideriamo ora i triangoli AMC e …… ; essi hanno:

AM …………... (o ….. $\cong$ AM per la proprietà …………… della congruenza);

…… $\cong C\hat{A}M$ per ipotesi;

$A\hat{M}D \cong$ …… per quanto precedentemente osservato.

I due triangoli, avendo un lato e i due angoli ad essi adiacenti ordinatamente congruenti, sono congruenti per il ….. criterio di congruenza dei triangoli. Avranno, pertanto, tutti gli elementi corrispondenti congruenti, in particolare:

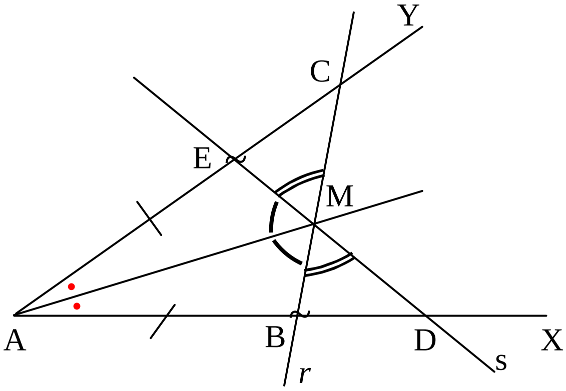
AD ≅ ….. (“*segnare AD e ..... con il simbolo* ~ ”).

Si ha allora che:

BD ≅ EC per …………………… di segmenti congruenti.

C.V.D.

[Al termine del problema la figura si presenta come segue:



]

Problemi sulla congruenza

102) Dato il triangolo ABC, sia CM la mediana relativa al lato AB. Prolunga CM di un segmento MD tale che MD $\cong$ CM.
Dimostra che:
$A\widehat{C}B \cong A\widehat{D}B$.

103) Dato il triangolo ABC, conduci la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$ e su di essa prendi due punti D ed E, tali che AD $\cong$ AB e AE $\cong$ AC.
Dimostra che:
BE $\cong$ CD.

104) Disegna due segmenti AB e BC, congruenti e consecutivi. Dopo aver indicato con M il punto medio di AB e con N il punto medio di BC, unisci C con M e A con N.
Dimostra che i triangoli ABN e CBM sono congruenti.

105) Disegna un triangolo ABC; prolunga il lato BC, oltre C, di un segmento CD $\cong$ BC e il lato AC, sempre oltre C, di un segmento CE $\cong$ AC; congiungi E con D.
Dimostra che gli angoli $B\widehat{A}C$ e $C\widehat{E}D$ sono congruenti.

106) Siano *r* e *s* due rette incidenti e sia O il loro punto intersezione. Prendi due punti Q e P sulla retta *r* tali che OQ $\cong$ OP e due punti F e G sulla retta *s* tali che OF $\cong$ OG.
Indica con M il punto medio di FP e prolunga il segmento OM, dalla parte di O, fino ad incontrare il segmento QG nel punto N. Perché è possibile affermare che N è punto medio di QG ?

107) Disegna un angolo di vertice P e la sua bisettrice. Considera sui lati dell'angolo due punti A e B tali che PA $\cong$ PB e prendi un punto qualsiasi Q sulla bisettrice.
Dimostra che i triangoli PAQ e PBQ sono congruenti.
Considera, poi, sulla bisettrice un punto C, esterno al segmento PQ.
Dimostra che i triangoli AQC e BQC sono congruenti.

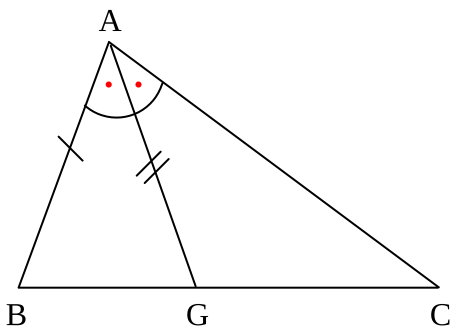
108) Dato il triangolo ABC, prolunga il lato AB di un segmento BD $\cong$ AB e il lato BC di un segmento BE $\cong$ BC. Detti M ed N, rispettivamente, i punti medi di AC e DE, dimostra che i punti M, B e N sono allineati.
(suggerimento: *tre punti sono allineati se formano un angolo piatto*)

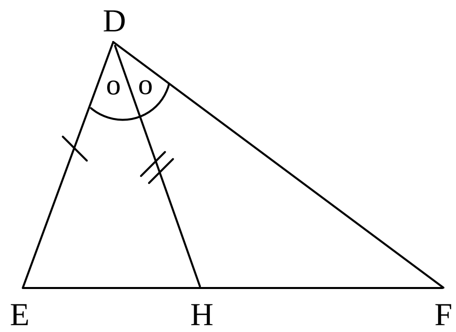
109) Dagli estremi di un segmento AB, conduci, da parti opposte rispetto ad AB, due semirette *a* e *b* che formino con AB angoli congruenti.

Dal punto medio M di AB conduci, poi, una qualsiasi retta *r* che incontri le semirette *a* e *b* in C e D rispettivamente.

Dimostra che i triangoli ACM e BDM sono congruenti.

110) Dei seguenti triangoli:



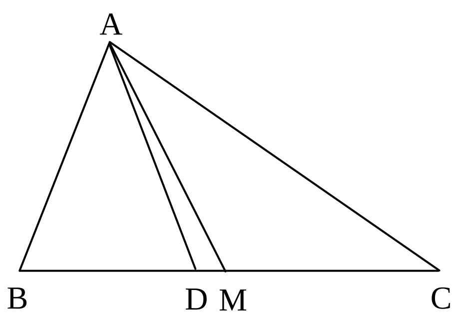


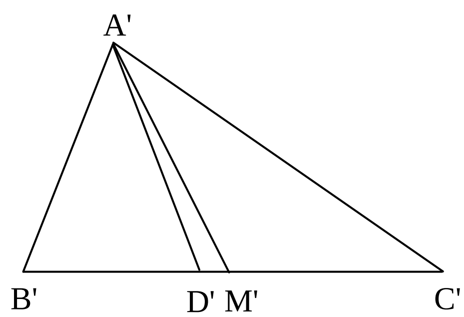
si sa che: $\begin{cases} AB \cong DE \\ AG \cong DH \\ B\widehat{A}G = G\widehat{A}C \wedge E\widehat{D}H \cong H\widehat{D}F \\ B\widehat{A}C \cong E\widehat{D}F \end{cases}$

Dimostra che i triangoli ABC e EDF sono congruenti.

(suggerimento: *applica prima il 1° criterio di congruenza ai triangoli* ………)

111) I triangoli ABC e A'B'C' delle seguenti figure sono congruenti:





Si sa inoltre che:

$BM \cong MC$; $B'M' \cong M'C'$

$B\widehat{A}D \cong D\widehat{A}C$; $B'\widehat{A'}D' \cong D'\widehat{A'}C'$

Dimostra che i triangoli ADM e A'D'M' sono congruenti.

112) Disegna un triangolo ABC, isoscele sulla base BC. Prolunga il lato AB di un segmento BD e il lato AC di un segmento CE $\cong$ BD. Congiungi C con D e B con E.
Dimostra che:

BE $\cong$ CD.

113) Disegna un triangolo equilatero ABC; considera un punto P sul lato AB, un punto Q su BC e un punto R su CA in modo che AP $\cong$ BQ $\cong$ CR.
Dimostra che il triangolo PQR è equilatero.

114) Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AC; indica con F il punto intersezione delle bisettrici AT e CS degli angoli congruenti. Dimostra che i segmenti FS e FT sono congruenti e che il triangolo BST è isoscele.

115) Prolunga i lati AB e AC di un triangolo isoscele ABC, di due segmenti congruenti BM e CN.
Dimostra che:

a) BN $\cong$ CM;

b) BO $\cong$ CO, essendo BN $\cap$ CM = {O} ;

c) $B\hat{A}O \cong C\hat{A}O$.

116) Dato un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, siano BN e CM le mediane relative ai lati congruenti. Prolunga BN di un segmento ND e CM di un segmento ME tale che ND $\cong$ ME.
Dimostra che:

a) BE $\cong$ CD;

b) AD $\cong$ AE.

(suggerimento: *dimostra prima la congruenza dei triangoli BMC e BNC*)

117) Dato il triangolo isoscele ABC, prolunga la base BC di due segmenti congruenti BD e CE.
Considera internamente alla base BC due punti P e Q tali che BP $\cong$ QC.
Dimostra che i triangoli APD e AQE sono congruenti.

118) Dato un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, dimostra che:

a) le mediane relative ai lati congruenti sono congruenti;

b) le bisettrici relative ai lati congruenti sono congruenti.

119) Dato un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, prolunga i lati CA e CB secondo le semirette AX e BY. Traccia le bisettrici degli angoli $X\hat{A}B$ e $Y\hat{B}A$ e sia P il loro punto d'intersezione.
Dimostra che:
AP $\cong$ BP;
Detti {Q} = AC $\cap$ BP e {R} = BC $\cap$ AP, dimostra che il triangolo PQR è isoscele.

120) Sui lati OX e OY di un angolo $X\hat{O}Y$, considera, rispettivamente, due punti A e B tale che OA $\cong$ OB. Dai punti A e B traccia due semirette che formino angoli congruenti con i segmenti considerati e indica con P il loro punto d'intersezione. Dimostra che:

a) AP $\cong$ PB;
b) OP è bisettrice dell'angolo $A\hat{O}B$.

(suggerimento: *unisci* A *con* B¸ *il triangolo* AOB *è ……..…. sulla base …… , quindi* ……)

121) Sia $X\hat{O}Y$ e $Y\hat{O}Z$ due angoli acuti consecutivi congruenti. Sui lati OX, OY, OZ prendi rispettivamente i punti A, B e C tale che OA $\cong$ OB $\cong$ OC.
Sulle bisettrici degli angoli $X\hat{O}Y$ e $Y\hat{O}Z$ considera, rispettivamente, i punti R e S tali che sia OR $\cong$ OS.
Dimostra che i triangoli ARB e BSC sono isosceli e tra loro congruenti.

122) Dimostra che, se la bisettrice dell'angolo in A di un triangolo ABC forma con il lato opposto BC angoli congruenti, il triangolo ABC è un triangolo isoscele.

123) Dal vertice A di un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, conduci, esternamente al triangolo, due semirette che formano angoli congruenti con i lati del triangolo. Detti D ed E i punti in cui tali semirette incontrano il prolungamento della base BC, dimostra che il triangolo ADE è isoscele.

124) Le bisettrici degli angoli congruenti di un triangolo isoscele ABC di vertice A incontrano i lati AB e AC, rispettivamente, nei punti D ed E.
Dimostra che BD $\cong$ CE.

125) Dato il triangolo ABC, isoscele sulla base BC, prendi su AB un punto D e su AC un punto E tale che AD $\cong$ AE. Congiungi il punto medio M di BC con i punti D ed E.
Dimostra che:

a) $A\hat{M}D \cong A\hat{M}E$;
b) il triangolo DME è isoscele.